

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)

Факультет **ФИЗИЧЕСКИЙ**

Кафедра автоматизации физико-технических исследований

Направление подготовки **03.03.02 ФИЗИКА**

Образовательная программа: **БАКАЛАВРИАТ**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(научно-исследовательский формат)**

ненужное убрать

Ходатович Евгений Владимирович

(Фамилия, Имя, Отчество автора)

Тема работы Разработка математической модели движения и системы управления квадаторным
аппаратом со смещенным центром вращения.

«К защите допущена»

Заведующий кафедрой

к.т.н., доцент

Лысаков К.Ф. /.....
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2025 г.

Научный руководитель

к.т.н.

зав. лаб. ИАиЭ СО РАН

Котов К.Ю. /.....
(фамилия И., О.) / (подпись, МП)

«.....».....2025 г.

Дата защиты: «.....».....2025 г.

Новосибирск, 2025

Оглавление

Введение	3
1 Литературный обзор	5
2 Теоретическая часть	7
2.1 Постановка задачи	7
2.2 Вывод дифференциальных уравнений движения	8
2.3 Описание алгоритма управления	10
2.4 Архитектура СУ	11
3 Экспериментальная часть	15
3.1 Описание экспериментальной установки	15
3.2 Измерение характеристик системы	17
3.2.1 Моменты инерции	17
3.2.2 Сравнение фильтров Махони и низких частот	18
3.2.3 Параметры в фильтре Калмана	19
3.2.4 Эксперименты по удержанию углов	22
4 Заключение	29
5 Список литературы	30
ПРИЛОЖЕНИЕ А	33

Введение

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) в последние десятилетия набирают всё большую популярность в различных областях человеческой деятельности: пассажирские и грузовые перевозки, воздушная фото- и видеосъёмка, спасательная деятельность и т.д. Среди всех видов БПЛА выделяются квадросоторные аппараты (далее квадрокоптер), так как не требуют взлётной полосы и открытого пространства для маневрирования, имеют простой дизайн и устойчивы к изменениям в окружающей среде. В процессе тестирования системы управления (далее СУ) квадрокоптером остро встаёт вопрос о создании безопасной экспериментальной среды, так как это позволяет предотвратить ущерб для аппарата и окружения в случае ошибок. Однако применение устройства в экспериментальном стенде приводит к изменению механики его движения, что, в свою очередь, требует адаптации СУ.

Целью данной работы является создание СУ квадрокоптером, согласованной с условиями работы аппарата на экспериментальном стенде. Стенд представляет собой гироскопическую структуру с двумя вращательными степенями свободы и осями вращения, смещёнными относительно осей вращения свободного аппарата. Для этого с помощью метода Лагранжа [1] была получена математическая модель объекта (гибрид модели свободно вращающегося аппарата и модели перевернутого маятника). Используя метод структурного синтеза, основанный на задании требуемых дифференциальных уравнений движения системы [2], была синтезирована СУ. В качестве входных данных использованы показания датчиков инерциального измерительного модуля (далее ИИМ). Для фильтрации входных данных использован фильтр Махони [3]. Для компенсации транспортного запаздывания, связанного с конечной скоростью передачи данных между модулями и скоростью вычислений, использован аналитический экстраполятор [4]. Для оценки предсказанных экстраполятором состояний использован расширенный фильтр Калмана [4].

Поскольку экспериментальный стенд не обеспечивает пространственных степеней свободы, разработанная СУ была протестирована на задаче стабилизации угла наклона при его ступенчатых, пилообразных и

синусоидальных изменениях. Для оценки работы СУ сравнивались угол наклона аппарата, оценённый фильтром Калмана, и заданный угол. Для экспериментов реализовано НЛ-моделирование с учётом шумов и временных задержек реального аппарата, а также проведены лётные эксперименты.

Работа состоит из следующих секций: секция 1 предоставляет литературный обзор существующих методов конструирования экспериментального стенда и разработки СУ квадрокоптером. Секция 2 посвящена созданию математической модели объекта, синтезу СУ и рассмотрению дополнительных модулей системы: фильтра, предсказателя состояния объекта и расширенного фильтра Калмана. Секция 3 посвящена описанию экспериментальной установки, определению её параметров. В этой секции также приведены результаты экспериментов и направления дальнейших исследований. Секция 4 посвящена обсуждению полученных результатов.

1 Литературный обзор

Среди исследований, в которых используются экспериментальные платформы, можно выделить две основные группы. В первой группе исследований платформа строится на основе шарнирных соединений. Например, в работах [5, 6, 7, 8] используется сферический шарнир, что допускает 3 вращательные степени свободы, хоть и с ограничением на максимальный угол наклона. В [7, 8] предполагается, что центр вращения аппарата совпадает с центром масс, поэтому модель аппарата считается неотличимой от модели свободного вращения. В работе [5] изменение поведения объекта вследствие смещения его осей вращения считается внешним возмущением, которое подавляется СУ, предложенной авторами. В [6] это изменение учитывается за счет дополнительного слагаемого в уравнении крутящего момента.

Во второй группе исследований платформа строится на основе гироскопической структуры. Такой тип структуры допускает больший допустимый угол вращения (вплоть до 180°). Во всех исследованиях, использующих такой экспериментальный стенд, либо делается предположение о совпадении центров масс и вращения объекта [9, 10, 11, 12], либо совпадение достигается конструкторским путем [13, 14, 15]. Отдельно стоит отметить работу [13], в которой приведён обзор существующих конструкторских решений и анализ их недостатков.

Данная работа направлена на исследование влияния смещения центра масс относительно центра вращения и на учёт этого смещения при реализации алгоритма управления. Для этого необходимо использовать математическую модель объекта, учитывающую это смещение, однако в рассмотренной литературе подобные модели не рассматривались. В связи с этим для построения модели был использован метод Лагранжа, подробно описанный в работе [1]. Поскольку полученная модель является "гибридом" модели свободного вращения квадрокоптера и модели обратного маятника, полезной оказалась работа [16], так как в ней метод Лагранжа был применён для моделирования обратного маятника на тележке.

Следующим этапом данной работы стал синтез законов управления: для этого был применен метод синтеза, основанный на организации

вынужденного движения вдоль желаемой траектории [2]. В работах [17] и [18] этот метод был использован на примерах свободного движения квадрокоптера и движения квадрокоптера с грузом на подвесе, соответственно. Отдельного внимания заслуживает работа [19], предоставляющая обзор последних разработок в области алгоритмов управления квадрокоптерами.

Одной из задач данной работы стала компенсация временных задержек в системе. В работах [20, 21] описано использование предсказателя состояний для задач перевернутого маятника и квадрокоптера соответственно. В [22] описано использование адаптивных систем контроля в условиях неизвестных динамики и задержек. В работе [23] использован предиктор Смита для компенсации задержек в сетевой СУ. В данной работе использован аналитический экстраполятор [4].

2 Теоретическая часть

2.1 Постановка задачи

Отметим следующее допущение: аппарат симметричен относительно собственных осей вращения, т.е. его тензор инерции диагонален:

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

В данной работе рассматривается вращение квадрокоптера вокруг центра, смещённого относительно центра масс аппарата. Построим систему координат (x_b, y_b, z_b) , жёстко связанную с аппаратом и полученную параллельным переносом главных осей аппарата на расстояние h вдоль отрицательного направления оси z_b (рисунок 1). В условиях двух вращательных степеней свободы и фиксированных пространственных координат вектор состояния аппарата $\mathbf{q} = (\dot{\phi}, \phi, \dot{\theta}, \theta) = (w_x, \phi, w_y, \theta)$ состоит из углов поворота осей x_b, y_b относительно неподвижной системы координат, а также угловых скоростей, определённых как производная

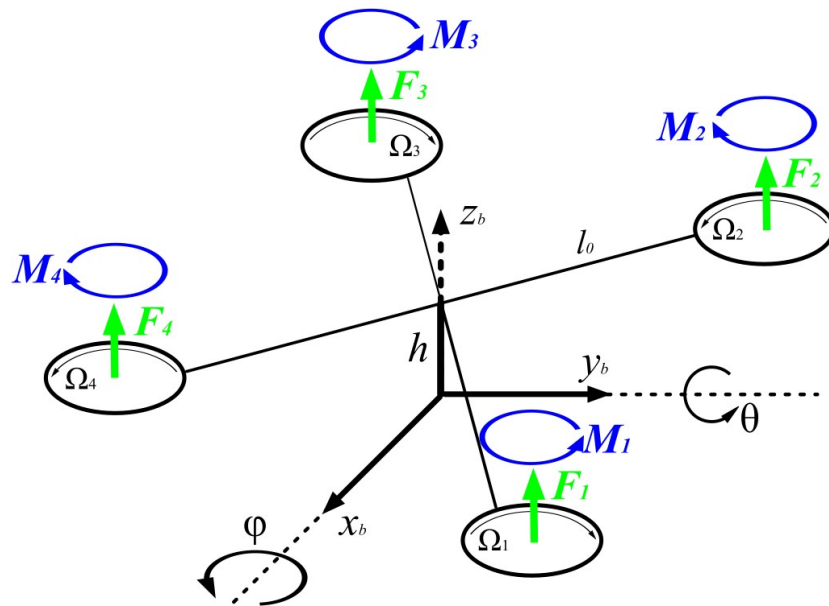


Рисунок 1 — Схематическое изображение системы

по времени соответствующих углов. В литературе приняты следующие обозначения: ϕ – угол поворота вокруг оси x_b (крен), θ – угол поворота вокруг оси y_b (тангаж). Угол поворота вокруг оси z_b (рысканье) и соответствующая ей угловая скорость считаются равными нулю.

2.2 Вывод дифференциальных уравнений движения

Для поиска математической модели объекта воспользуемся методом Лагранжа [1]. Его суть заключается в решении уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} &= \mathbf{u}, \\ L &= T - U, \\ T &= \frac{1}{2} I_x w_x^2 + \frac{1}{2} I_y w_y^2, \\ U &= mgh \cos \phi \cos \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

где L – Лагранжева функция; T и U – кинетическая и потенциальная энергии тела; \mathbf{u} – вектор обобщённых сил (вращающих моментов): $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$; ξ – вектор обобщённых координат: $\xi = (\phi, \theta)$, $\dot{\xi} = (w_x, w_y)$; m – масса аппарата. Отметим, что в случае отсутствия вращения вдоль оси z_b вращающий момент $u_4 = 0$, а общая тяга u_1 задаётся извне, поэтому определение вектора обобщённых сил упрощается до $\mathbf{u} = (u_2, u_3)$. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, новые моменты инерции равны

$$I_{x,y} = I_{xx,yy} + mh^2. \tag{2}$$

Проведем последовательность преобразований уравнений (1) чтобы получить систему уравнений для обобщённых координат.

$$L = \frac{1}{2} I_x w_x^2 + \frac{1}{2} I_y w_y^2 - mgh \cos \phi \cos \theta.$$

Производная Лагранжевой функции по обобщённым координатам $\frac{\partial L}{\partial \xi}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \phi} = mgh \sin \phi \cos \theta, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgh \cos \phi \sin \theta; \end{cases}$$

по производной обобщённых координат $\frac{\partial L}{\partial \xi}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_x} = I_x w_x, \\ \frac{\partial L}{\partial w_y} = I_y w_y. \end{cases}$$

Подставив это в уравнение Лагранжа, получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(I_x w_x) - mgh \sin \phi \cos \theta = u_2, \\ \frac{d}{dt}(I_y w_y) - mgh \cos \phi \sin \theta = u_3. \end{cases}$$

Взяв производную по времени, а также добавив определения угловых скоростей как производных по времени углов, получаем дифференциальные уравнения движения объекта:

$$\begin{cases} I_x \dot{w}_x = u_2 + mgh \sin \phi \cos \theta, \\ \dot{\phi} = w_x, \\ I_y \dot{w}_y = u_3 + mgh \cos \phi \sin \theta, \\ \dot{\theta} = w_y. \end{cases} \quad (3)$$

Эта система эквивалентна уравнению

$$\dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (4)$$

где f – функция, отражающая модель объекта.

Силы и моменты сил, действующие на квадрокоптер, также показаны на рисунке 1. Каждый ротор создаёт силу тяги F_i , направленную вверх, и момент M_i , направленный в сторону, противоположную вращению винта i . Связь между вектором управляющих сигналов и силами тяги задаётся соотношением

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & l & -l & -l \\ l & -l & -l & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix},$$

где $l = l_0 \cos \frac{\pi}{4}$ – плечо сил F_i . В матричном представлении

$$\mathbf{u} = \mathbf{M} * \mathbf{f}. \quad (5)$$

2.3 Описание алгоритма управления

В работе [2] описано использование метода синтеза алгоритма управления, основанного на организации вынужденного движения вдоль желаемой траектории для получения дифференциальных уравнений, связывающих углы наклона и их первые и вторые производные:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -(a_\phi + k_\phi)\dot{\phi} - a_\phi k_\phi(\phi - \phi_{ref}), \\ \ddot{\theta} = -(a_\theta + k_\theta)\dot{\theta} - a_\theta k_\theta(\theta - \theta_{ref}), \end{cases}$$

где ϕ_{ref}, θ_{ref} — заданные углы, $a_\phi, a_\theta, k_\phi, k_\theta$ — коэффициенты, которые определяют скорость переходного процесса и вычисляются

экспериментально. Подставив уравнения (3), получим систему

$$\begin{cases} u_2 = I_x(-(a_\phi + k_\phi)w_x - a_\phi k_\phi(\phi - \phi_{ref})) - mgh \sin \phi \cos \theta, \\ u_3 = I_y(-(a_\theta + k_\theta)w_y - a_\theta k_\theta(\theta - \theta_{ref})) - mgh \cos \phi \sin \theta. \end{cases} \quad (6)$$

2.4 Архитектура СУ

Одной из проблем в системе управления являются временные задержки, обусловленные дискретизацией непрерывных величин, ограниченной скоростью вычислений модулей системы и конечной пропускной способностью передачи данных между ними. Для решения данной проблемы может быть использован метод аналитической экстраполяции, который позволяет оценить вектор состояния в необходимый момент времени t , используя текущий вектор состояния и модель объекта [4]. Полученная таким образом оценка имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}^k = \mathbf{q}_0^k + \sum_{i=k}^{k+N} f(\mathbf{q}_m^i, \mathbf{u}^{i-N}) dt, \\ \mathbf{q}_m^k = \mathbf{q}_0^k, \end{cases} \quad (7)$$

где $\hat{\mathbf{q}}^k$ – оценка вектора состояния с учётом запаздывания; \mathbf{q}_0^k – значение вектора состояния в текущий момент времени $t = kdt$, полученное от ИИМ; \mathbf{q}_m^i – состояние модели на i -ом шаге экстраполяции, инициализированное значением \mathbf{q}_m^k ; N – число шагов, предсказывающее состояние объекта через Ndt секунд. Для использования экстраполятора необходимо хранить информацию о N последних значениях управления \mathbf{u} .

Одной из причин временных задержек является наличие переходного процесса установления скорости вращения винтов аппарата как реакция на входной ШИМ-сигнал. Моделирование процесса реакции двигателей как звена чистого запаздывания приводит к необходимости повышения числа шагов экстраполяции, что может привести к накоплению ошибки из-за не до конца скомпенсированных шумов измерений. В данной работе процесс реакции моделируется звеном первого порядка. Введем вектор

ШИМ-сигнала (PWM-signal)

$$\mathbf{u}^{pwm} = \begin{pmatrix} pwm_1 \\ pwm_2 \\ pwm_3 \\ pwm_4 \end{pmatrix} = c * \mathbf{f} + bias,$$

где c и $bias$ – параметры, определяемые экспериментально. Тогда динамический процесс в звене двигателя описывается уравнением

$$\frac{\mathbf{u}_{out}^{pwm}}{\mathbf{u}_{in}^{pwm}} = \frac{1}{Tp + 1},$$

где T – постоянная времени звена, p – оператор дифференцирования. Тогда с учетом уравнений (3), (5) полная система уравнений (включая предыдущее), описывающих модель объекта

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = M * \mathbf{u}^{pwm} / c, \\ \dot{w}_x = \frac{dt}{I_x} (u_2 + mgh \sin \phi \cos \theta), \\ \dot{\phi} = w_x, \\ \dot{w}_y = \frac{dt}{I_y} (u_3 + mgh \sin \theta \cos \phi), \\ \dot{\theta} = w_y. \end{array} \right.$$

В дискретном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{pwm\ k} = \mathbf{u}^{pwm\ k-1} + \frac{1}{T}(\mathbf{u}_{in}^{pwm} - \mathbf{u}^{pwm\ k-1}) * dt, \\ \mathbf{u}^k = M * \mathbf{u}^{pwm\ k} / c, \\ w_x^k = w_x^{k-1} + \frac{dt}{I_x}(u_2^k + mgh \sin \phi^{k-1} \cos \theta^{k-1}), \\ \phi^k = \phi^{k-1} + w_x^{k-1} dt, \\ w_y^k = w_y^{k-1} + \frac{dt}{I_y}(u_3^k + mgh \sin \theta^{k-1} \cos \phi^{k-1}), \\ \theta^k = \theta^{k-1} + w_y^{k-1} dt. \end{array} \right.$$

В таком случае формула (4) примет вид

$$\dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}^{pwm}(t)),$$

соответствующим образом изменится формула экстраполятора (7), а для его использования необходимо будет хранить N последних значений вектора \mathbf{u}^{pwm} .

Интегрирование по N отсчётам при использовании экстраполятора приводит к усилению шума и появлению выбросов в управляющих воздействиях. Для устранения этой проблемы предложено использовать фильтр Калмана. Так как функция модели f нелинейная, необходимо использовать расширенный фильтр Калмана, в котором f линеаризуется в окрестности рабочей точки. На вход фильтра поступают оценённый экстраполятором вектор состояния \mathbf{u}^k и вектор \mathbf{u}^{pwm} . Фильтрация Калмана состоит из двух этапов: экстраполяции и коррекции — их выражения имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_f^k = f(\hat{\mathbf{q}}_f^{k-1}, \mathbf{u}^{pwm\ k}), \\ P^k = F^k P^{k-1} (F^k)^T + Q, \\ K^k = \frac{P^k}{P^k + R}, \\ \hat{\mathbf{q}}_f^k = \mathbf{q}_f^k + K^k (\mathbf{q}^k - \mathbf{q}_f^k), \end{array} \right.$$

где $\hat{\mathbf{q}}_f^k$ – вектор состояния, полученный из фильтра Калмана на k -ом шаге; F^k – матрица процесса, вычисляемая на каждом шаге вследствие нелинейности модели:

$$F^k = \left. \frac{df(\mathbf{q}, \mathbf{u}^{pwm})}{d\mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}_f^{k-1}, \mathbf{u}^{pwm}=\mathbf{u}^{pwm\ k}};$$

P, R, Q – ковариационные матрицы состояния, шума измерений и ошибки модели соответственно. Значения элементов ковариационных матриц являются входными параметрами, и их подбор является одной из важных задач как при моделировании, так и при подготовке эксперимента.

Итоговый вид системы управления представлен на рисунке 2. Три вышеперечисленных модуля объединяются в нижний уровень системы. Данные с акселерометров и гиросенсоров ИИМ поступают на вход нижнего уровня, где происходит их фильтрация и оценка, после чего подкорректированные данные поступают на модуль управления. Туда же поступают данные с пользовательского интерфейса об опорных углах, после чего модуль реализует закон управления (6). Рассчитанный вектор управления идёт в драйвер моторов, откуда в виде ШИМ-сигнала поступает на электронные регуляторы хода (ЭР).

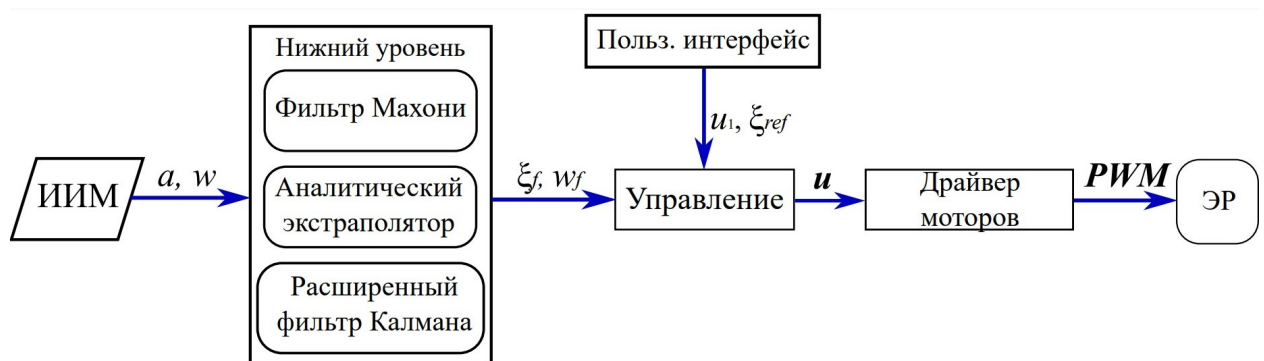


Рисунок 2 — Архитектурная схема ПО

3 Экспериментальная часть

3.1 Описание экспериментальной установки

Для лётных испытаний построена экспериментальная установка, представленная на рисунке 3. Данная установка допускает вращение центра масс аппарата вдоль двух осей (углы тангажа и крена), при этом предотвращая поступательное движение и вращение оси рыскания. Масса аппарата – 0,44 кг, масса всей вращающейся системы – 0,68 кг, расстояния между осью z_b и ротором $l_0 = 0,12$ м, между центром тяжести и центром вращения $h = 0,01$ м. Рама состоит из углепластиковых трубок с металлическими Т-образными соединителями. Аппарат закреплён на трубке (диаметр 0,016 м), которая прокручивается вокруг другой соосной трубки меньшего диаметра (диаметр 0,014 м), таким образом достигается вращение вдоль оси x_b . Внешнее кольцо закреплено при помощи подшипников к металлической неподвижной стойке, таким образом достигается вращение вдоль оси y_b .

Основными элементами аппаратного оснащения используемого квадрокоптера являются:

- Одноплатный компьютер Raspberry Pi 3
- Инерциальная система MPU9250
- Электронные регуляторы хода BLHeli

Модули СУ реализованы на языке C++ на основе Robot Operating System (ROS). Данный фреймворк даёт возможность удобного и оптимизированного запуска нескольких программных модулей, предоставляет интерфейс передачи сообщений между ними, а также открытый комплекс библиотек для разработки программного обеспечения роботизированных систем. Для создания пользовательского интерфейса использована библиотека Curses. Запуск всех модулей СУ происходит на бортовом компьютере Raspberry Pi, а управление пользовательским интерфейсом происходит на удалённом пункте управления посредством Wi-Fi.

Разработка собственной СУ и использование одноплатного компьютера имеют несколько преимуществ перед использованием существующих решений, таких как INAV или ArduPilot [24] и соответствующих им

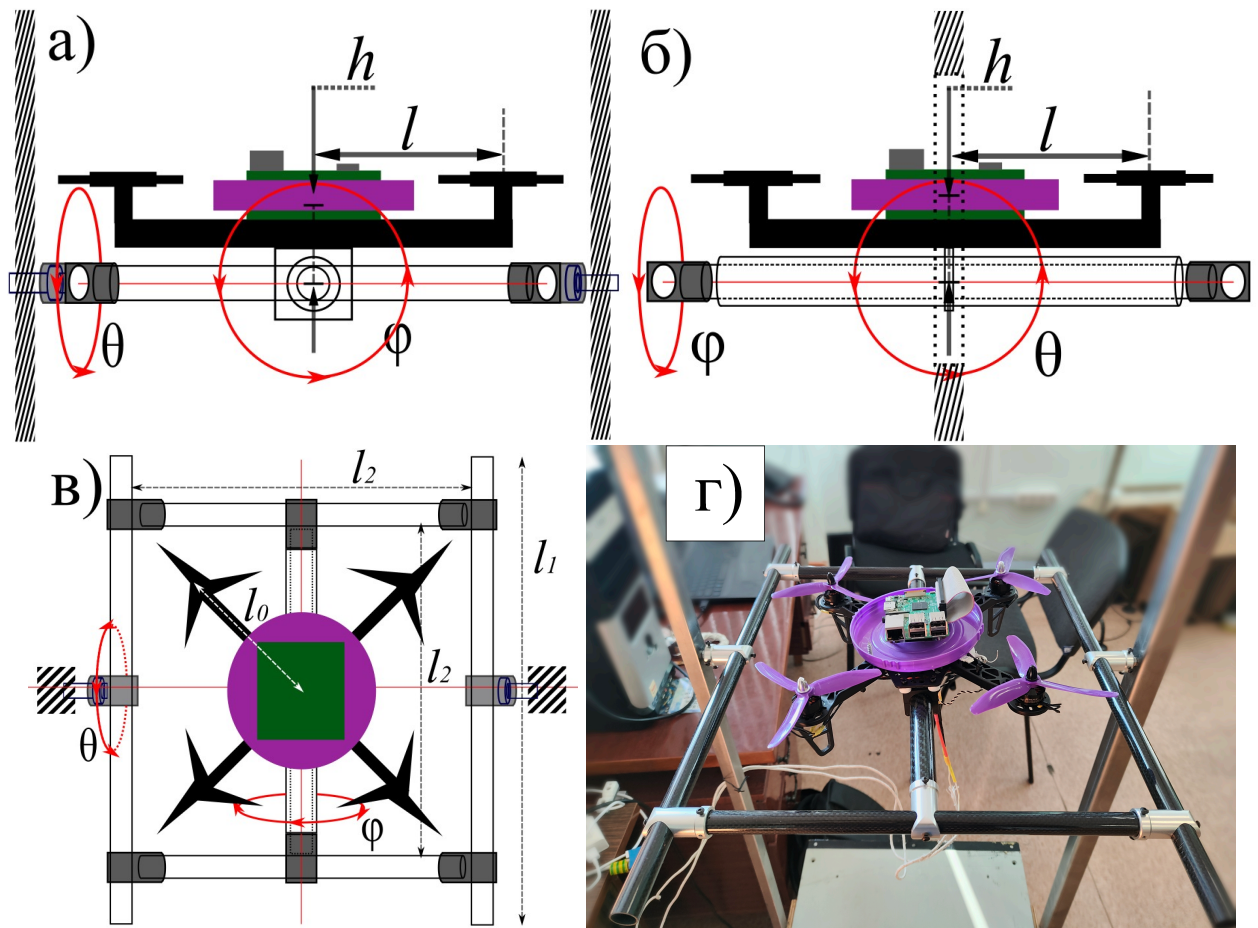


Рисунок 3 — Схема экспериментальной установки. а – вид спереди (ось x направлена на наблюдателя), б – вид справа (ось y направлена на наблюдателя), в – вид сверху (ось z направлена на наблюдателя), г – общий план.

микроконтроллеров (в основном, семейства STM).

- Существующие СУ предназначены для конкретных семейств микроконтроллеров, в то время как разработанная в данной работе СУ может быть использована в любой Linux системе. Это делает систему легко переносимой, повышает скорость разработки и отладки СУ, открывает возможности для использования удобных средств логирования в операционной системе.
- Микрокомпьютеры обладают большей вычислительной мощностью и бóльшим объемом памяти, что позволяет производить сложные вычисления (в т.ч. матричные для фильтра Калмана).

Однако использование операционной системы может привести к появлению дополнительной временной задержки. В ходе экспериментов выявлено, что

при работе нижнего уровня, модуля управления и драйвера моторов с частотой 200 Гц и работе ИИМ с частотой 250 Гц полная задержка между измерениями ИИМ и выставлением ШИМ-сигнала на регуляторах хода составляет 10 мс.

3.2 Измерение характеристик системы

3.2.1 Моменты инерции

В исследовании [25] предоставлен способ нахождения момента инерции тела произвольной формы. Этот способ был использован для нахождения момента инерции аппарата вдоль оси x_b . Полученная таким образом величина $I_{xx} = 0,002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Поскольку вдоль оси y_b вращается не только аппарат, но и кольцо стенда, момент инерции вдоль этой оси было необходимо найти при помощи теоремы Гюйгенса – Штейнера (при этом собственный момент инерции аппарата $I_{xx} = I_{yy}$). С учетом того, что

$$\frac{r^2}{l^2} \sim 10^2,$$

где r – радиус любой трубки, l – длина любой трубки, радиусом трубки можно пренебречь и считать их тонкими стержнями. Тогда

$$I_{yy} = I_{xx} + 2m_1 \left(\frac{1}{12}l_1^2 + \frac{1}{12}l_2^2 + \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 \right) + 6m_2 \left(\frac{l_2}{2} \right)^2,$$

где $m_1 = 0,03 \text{ кг}$ – масса трубки, $m_2 = 0,01 \text{ кг}$ – масса соединителя, $l_1 = 0,5 \text{ м}$ – длина трубки, перпендикулярной оси вращения, $l_2 = 0,35 \text{ м}$ – длина трубки, параллельной оси вращения. Полученный таким образом момент инерции $I_{yy} = 0,0075 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Отметим, что в формуле (2.2) с учётом характеристик стенда $mh^2 = 0,43 \cdot 0,015^2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \ll I_{xx,yy}$. Тогда $I_{x,y} \approx I_{xx,yy}$.

3.2.2 Сравнение фильтров Махони и низких частот

Построение системы управления осложнено тем, что источником данных об угловых скоростях и пространственных ускорениях является ИИМ. Поскольку этот модуль физически закреплён на аппарате, на его измерения влияют те же факторы, что влияют на движение самого аппарата: потоки воздуха, создаваемые винтами, асимметричность конструкции, механические вибрации и т.д. Все эти факторы создают высокочастотный шум, требующий фильтрации. В данном исследовании сравнивается работа двух фильтров: фильтра низких частот первого порядка (далее ФНЧ) и фильтра Махони [3]. Передаточная функция ФНЧ записывается в виде:

$$\frac{\mathbf{q}_f}{\mathbf{q}} = \frac{1}{Tp + 1},$$

где T – параметр фильтра, определяющий его частоту среза, p – оператор дифференцирования, \mathbf{q} и \mathbf{q}_f – исходный и отфильтрованный векторы состояния соответственно. В дискретном виде:

$$\mathbf{q}_f^k = \mathbf{q}_f^{k-1} - \frac{dt}{T}(\mathbf{q}_f^{k-1} - \mathbf{q}^k),$$

где \mathbf{q}_f^{k-1} – значение вектора состояния на предыдущем шаге расчётов, \mathbf{q}^k – измеренный вектор состояния на текущем шаге.

Сравнение двух фильтров происходило по тому, какие временные задержки вносит их использование. Для этого проведено несколько запусков системы с различными пропорциональными коэффициентами усиления k_p в фильтре Махони и постоянными времени $k_T = 1/T$ в ФНЧ. На рисунке 4 приведён амплитудный спектр угла крена без применения фильтров. Отметим наличие колебаний, связанных с работой алгоритма управления, в диапазоне от 0 до 2 Гц и колебаний шумов в диапазоне от 30 до 50 Гц. На рисунках 5, 6 приведены амплитудные спектры угла крена после фильтрации. На основе этих графиков были выбраны оптимальные значения обоих параметров: $k_p = 2$ и $k_T = 10$ – так как для этих значений среднее значение амплитуды колебаний минимально для частот шумов и максимально для

колебаний управления (рисунок 7). С оптимальными параметрами проведён эксперимент по ступенчатому изменению угла крена на 20° – его результат приведён на рисунке 8. Временная задержка, внесённая фильтром Махони: 0,76 мс – меньше задержки, внесённой ФНЧ: 1,4 с. Таким образом, фильтр Махони превосходит ФНЧ как с точки зрения подавления шумов, так и с точки зрения временных задержек.

3.2.3 Параметры в фильтре Калмана

В фильтре Калмана матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} q_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_a \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_a \end{pmatrix}$$

имеют параметры r_w , r_a – дисперсии шумов измерений угловых скоростей и углов соответственно q_w , q_a – дисперсии ошибки модели при измерениях угловых скоростей и углов соответственно. Значения этих параметров были

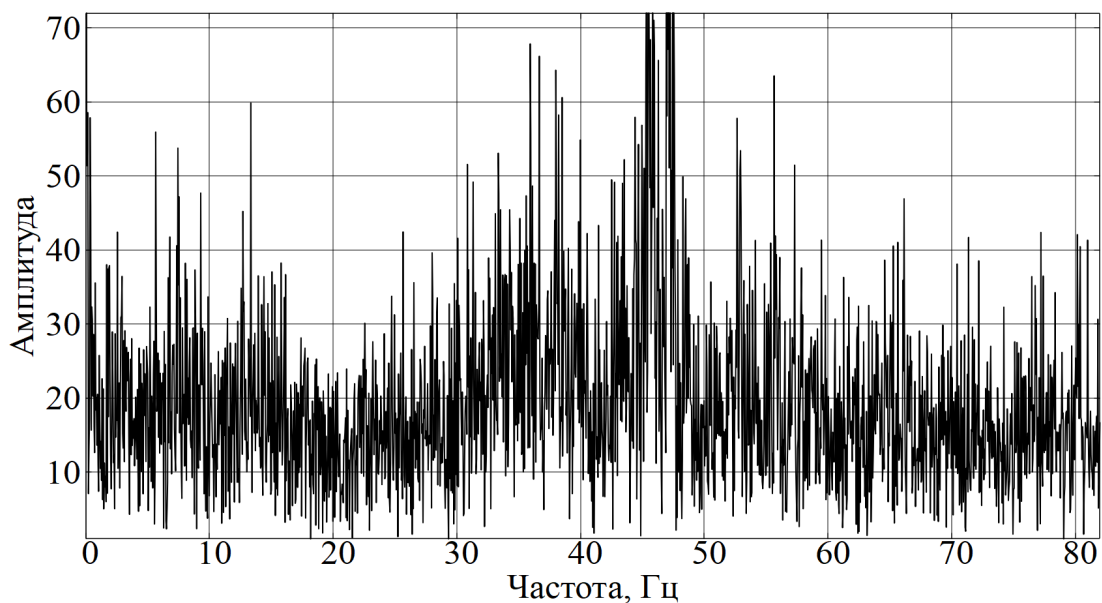


Рисунок 4 — Полный исходный амплитудный спектр угла крена

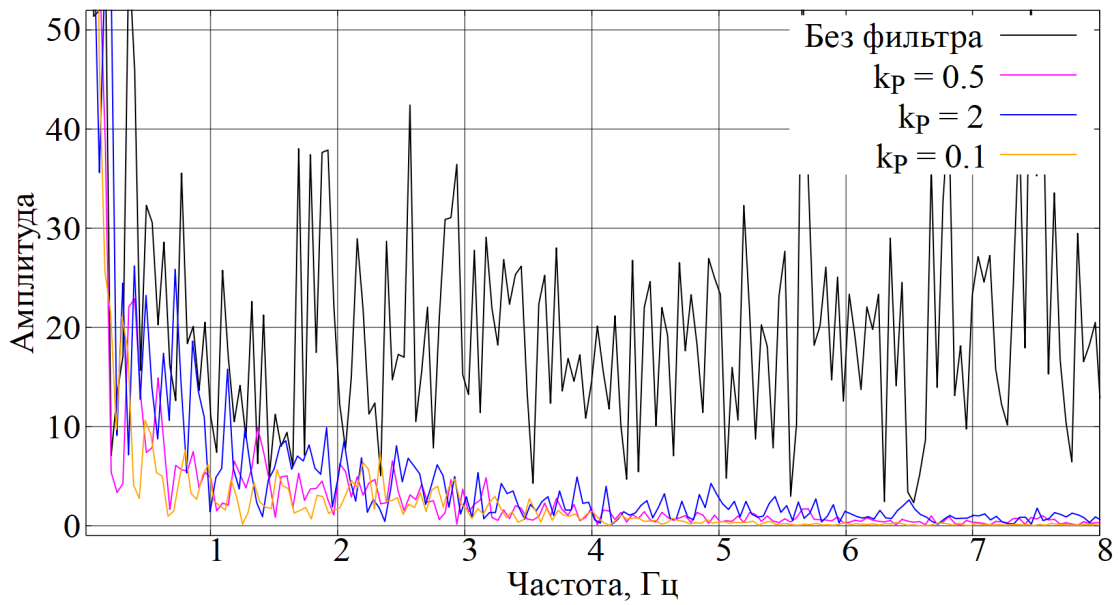


Рисунок 5 — Амплитудный спектр угла крена: исходный (черным) и после фильтра Махони с различными постоянными k_p

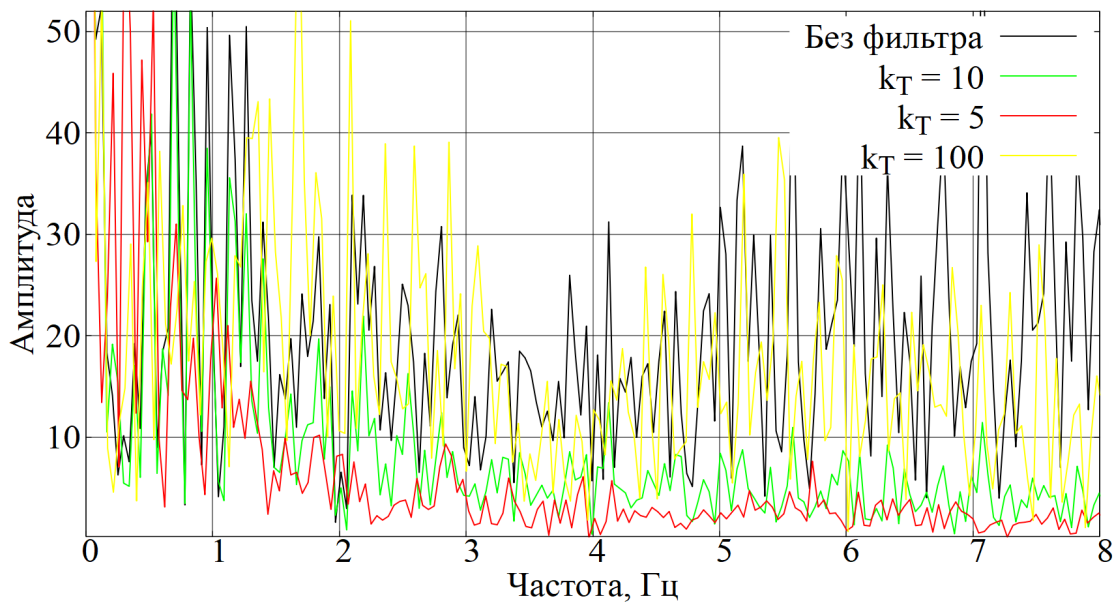


Рисунок 6 — Амплитудный спектр угла крена: исходный (черным) и после ФНЧ с различными постоянными k_T

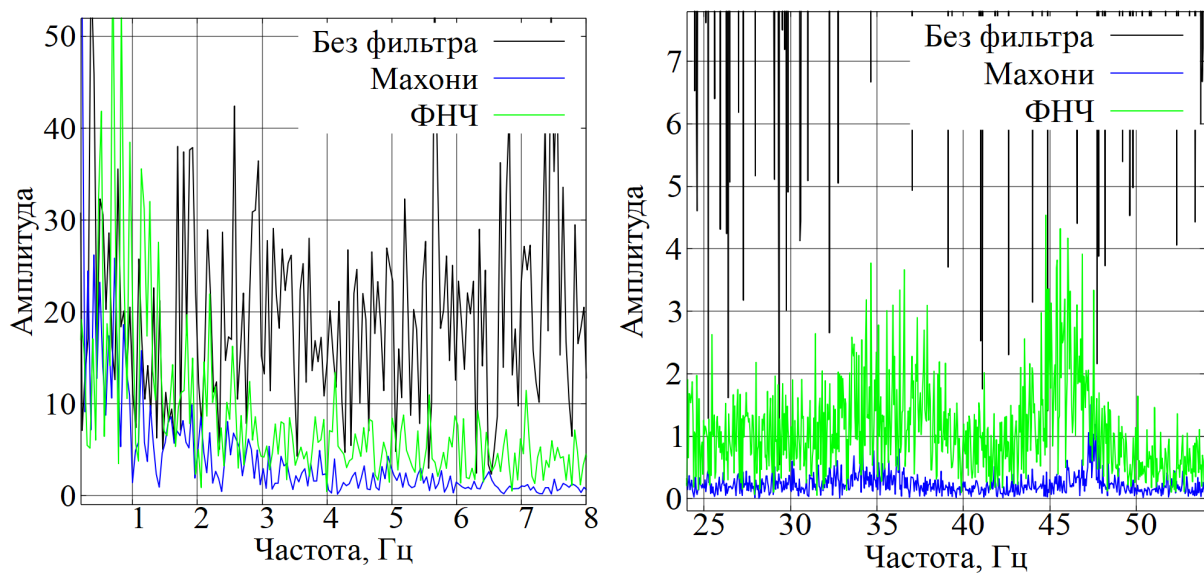


Рисунок 7 — Амплитудный спектр угла крена: исходный (черным), после фильтра Махони с $k_p = 2$ (синим) и ФНЧ с $k_T = 10$ (зеленым)

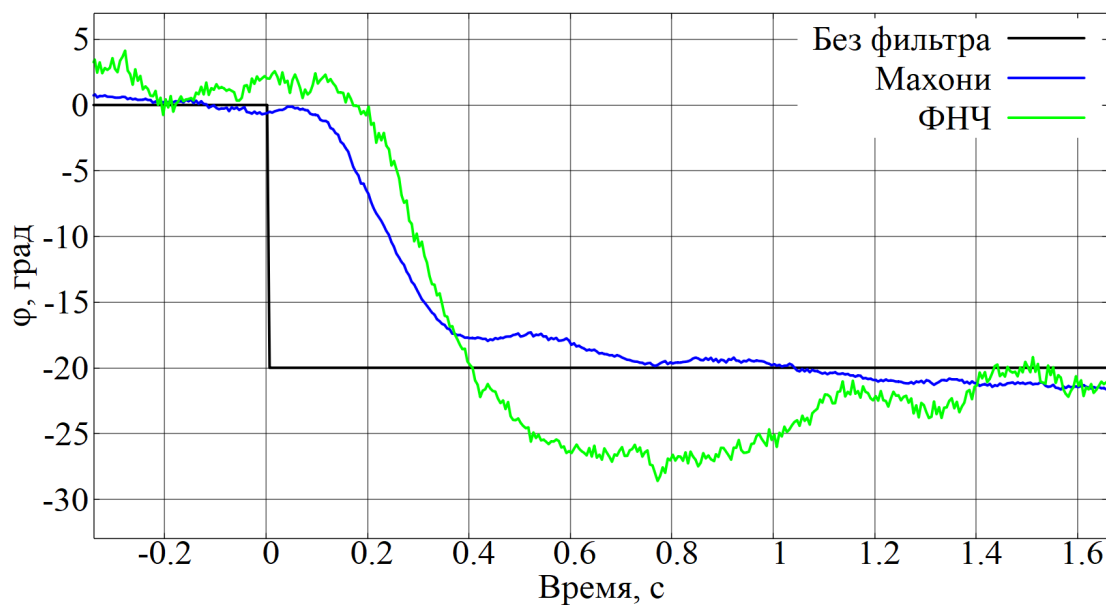


Рисунок 8 — Зависимость угла крена от времени после фильтра Махони с $k_p = 2$ (синим) и ФНЧ с $k_T = 10$ (зеленым)

получены экспериментально – на рисунке 9 показан график зависимости угла крена и соответствующей угловой скорости при нулевом задании угла; $r_a = 9,25 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2$, $r_w = 3,27 \cdot 10^{-3} (\text{рад/с})^2$. В работе [26] представлены особенности влияния значений коэффициентов q_a , q_w на работу фильтра: слишком большие значения коэффициентов приводят к чрезмерной реакции фильтра на шумы измерений, а слишком маленькие – к отклонениям оценки от реальных значений углов и неустойчивости фильтра. В ходе экспериментов получены минимальные значения этих коэффициентов, при которых фильтр остается устойчивым: $q_a = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2$, $q_w = 3,0 \cdot 10^{-5} (\text{рад/с})^2$.

3.2.4 Эксперименты по удержанию углов

Для проведения предварительных экспериментов на основе воссозданной математической модели был спроектирован программный модуль, симулирующий поведение реального аппарата. НПЛ-симулятор способен добавлять гауссовский шум с произвольным стандартным отклонением и произвольные временные задержки в виде транспортного запаздывания, кратные периоду работы модуля, к выходным значениям угловых скоростей и линейных ускорений. На рисунках 10-17 изображены результаты моделирования и экспериментов по удержанию углов крена и тангажа при ступенчатом изменении задания во времени, а на рисунке 18 - по

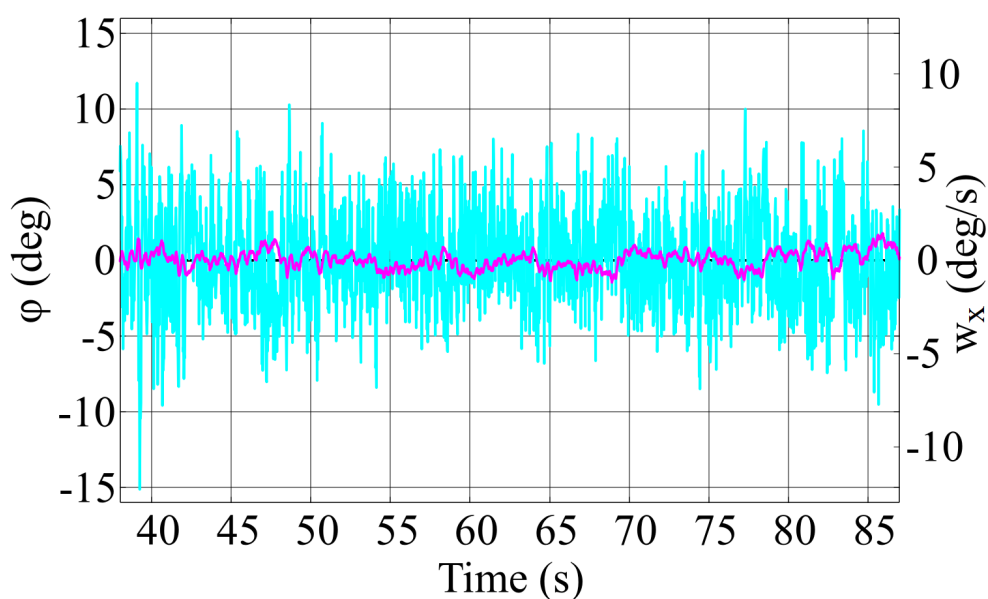


Рисунок 9 — Угол крена (фиолетовый) и угловая скорость (голубой) на входе фильтра Калмана. Желаемый угол $\phi_{ref} = 0$.

удержанию круговой угловой траектории. Дополнительные результаты экспериментов расположены в Приложении А. Временная задержка симулятора – 10 мс, стандартное отклонение шумов угловой скорости – 0,08 рад/с, линейных ускорений – 2,4 м/с²; коэффициенты переходного процесса в (6) $a_\phi = a_\theta = k_\phi = k_\theta = 10$. Учет отклонения центра масс от осей вращения посредством параметра h значительно уменьшил статическую ошибку угла крена (таблица 1), однако почти не уменьшил ошибку угла тангажа (таблица 2). Это объясняется неэквивалентностью осей вращения: вдоль оси крена вращается только аппарат, в то время как вдоль оси тангажа вращается аппарат вместе с кольцом установки, причем центр масс кольца совпадает с его центром вращения. Это приводит к изменению тензора инерции и уменьшает вклад смещенного центра вращения аппарата вдоль оси тангажа. Также влияние на результат эксперимента могли оказать несимметричность стенда вдоль обеих осей и трение трубок. Дальнейшие исследования будут направлены на более точную идентификацию параметров системы и создание адаптивных СУ. В связи с этим разработанная математическая модель и СУ могут послужить базисом для проведения будущих исследований.

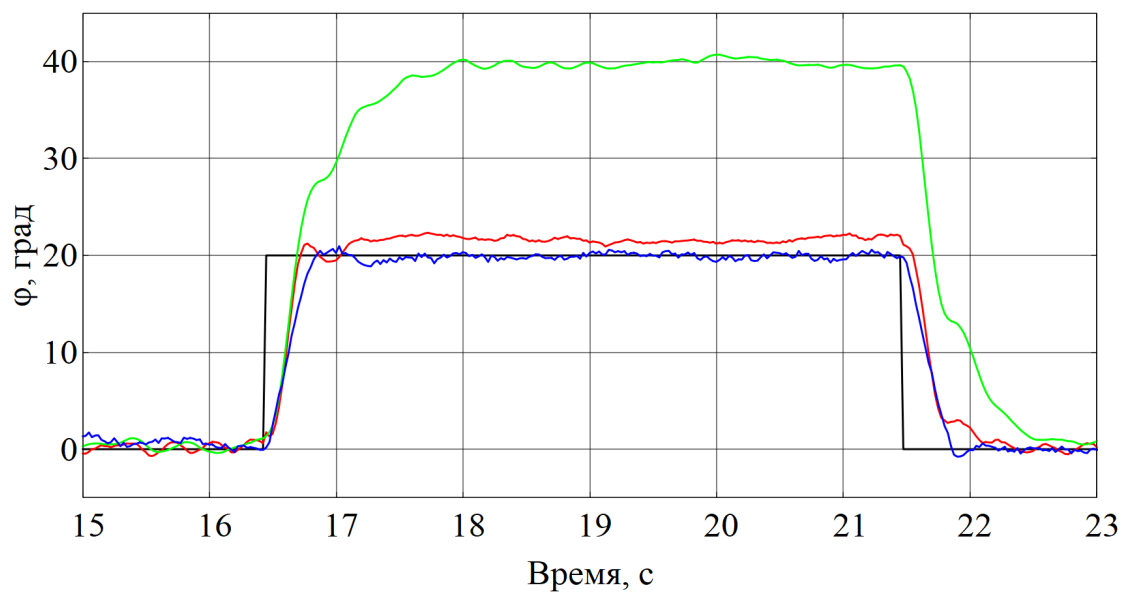


Рисунок 10 — Заданный угол крена (черным), угол модели (синим) и оценка угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным) и при $h = 0$ (зеленым)

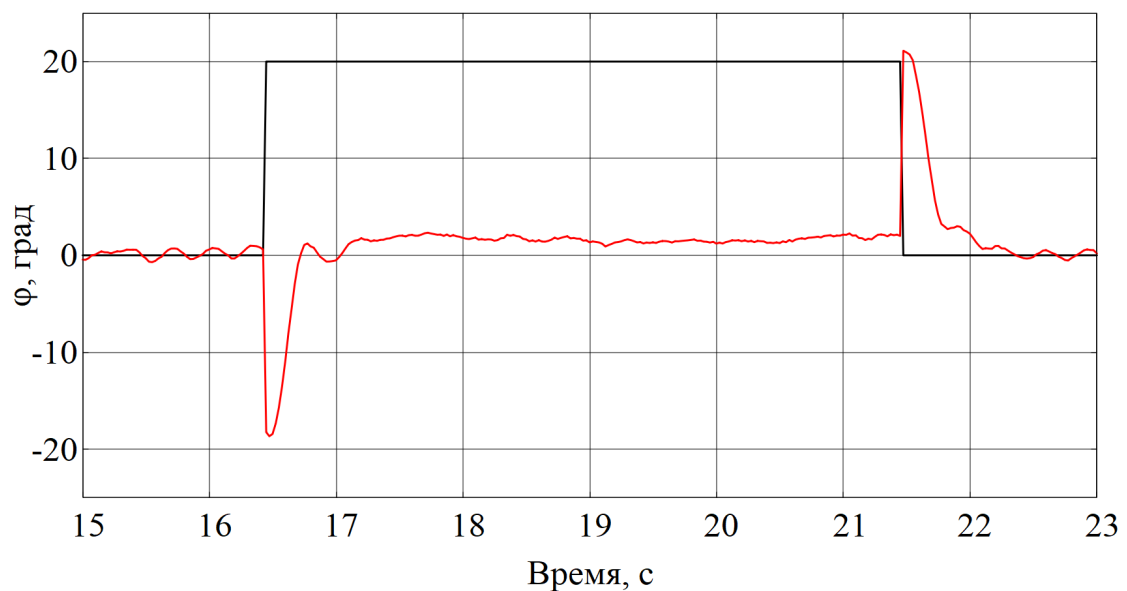


Рисунок 11 — Заданный угол крена (черным) и разность заданного угла и оценки угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным)

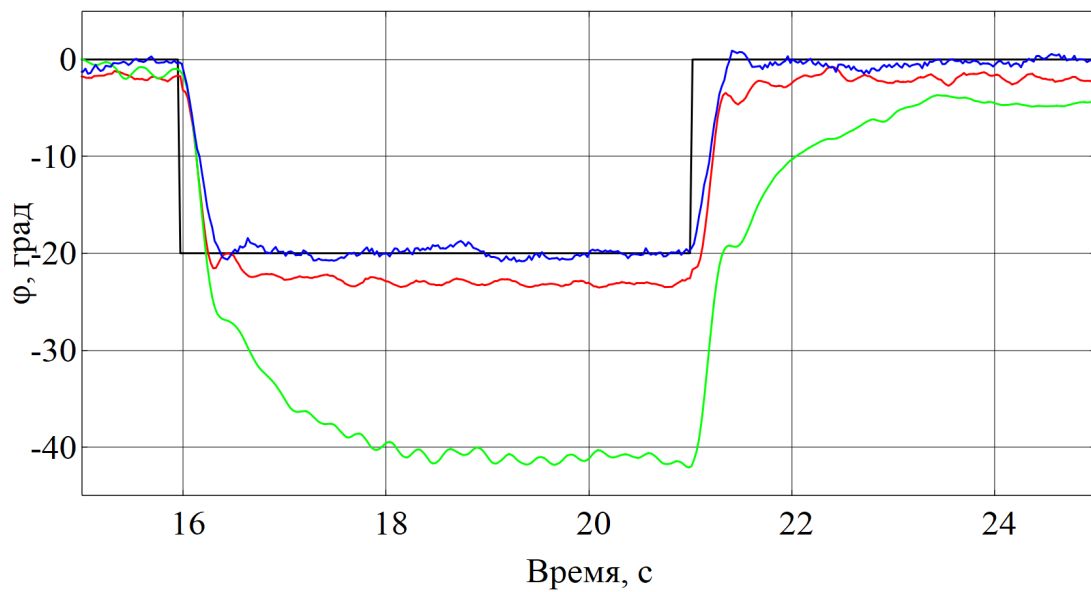


Рисунок 12 — Заданный угол крена (черным), угол модели (синим) и оценка угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным) и при $h = 0$ (зеленым)

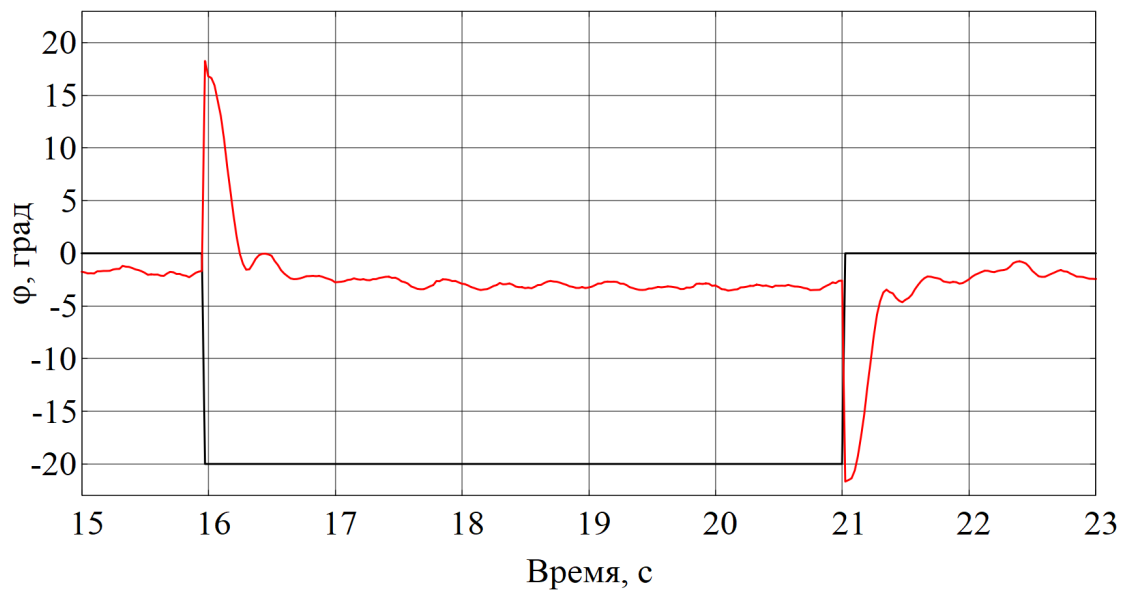


Рисунок 13 — Заданный угол крена (черным) и разность заданного угла и оценки угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным)

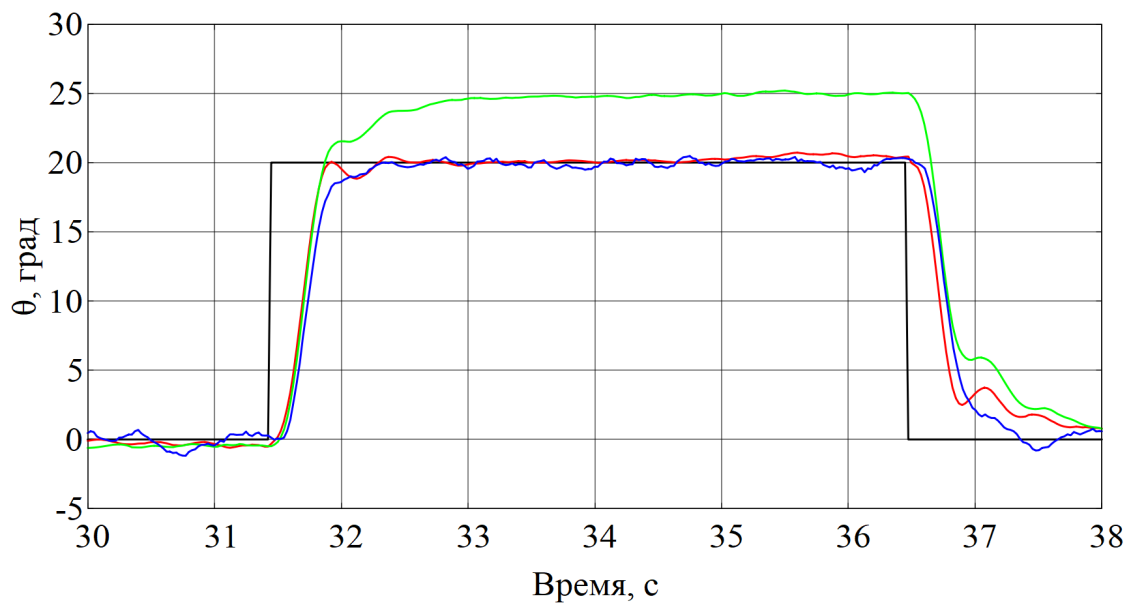


Рисунок 14 — Заданный угол тангажа (черным), угол модели (синим) и оценка угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным) и при $h = 0$ (зеленым)

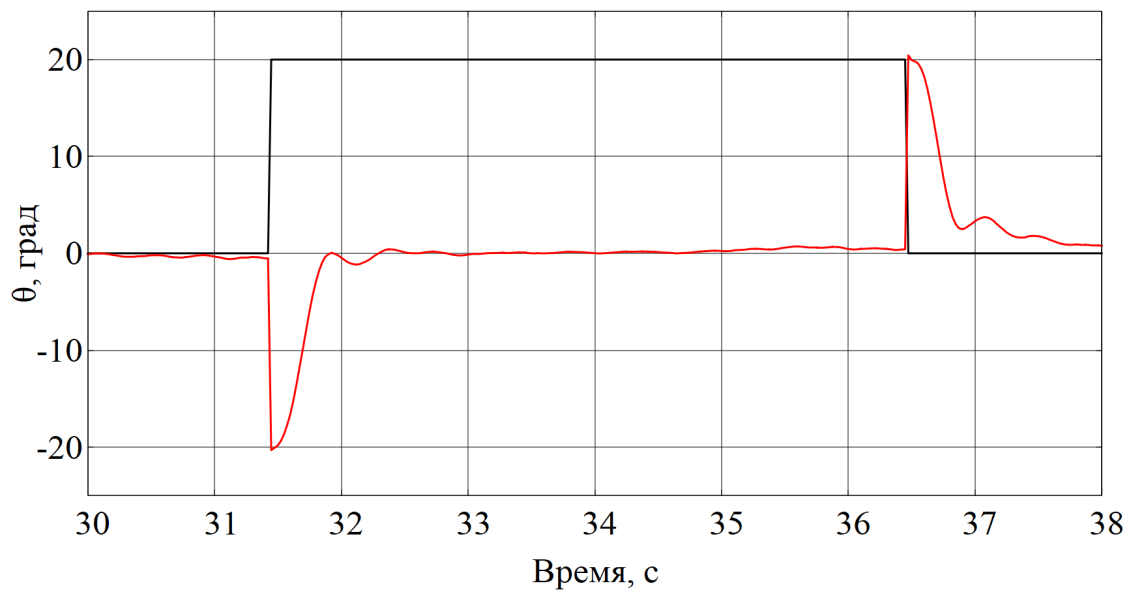


Рисунок 15 — Заданный угол тангажа (черным) и разность заданного угла и оценки угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным)

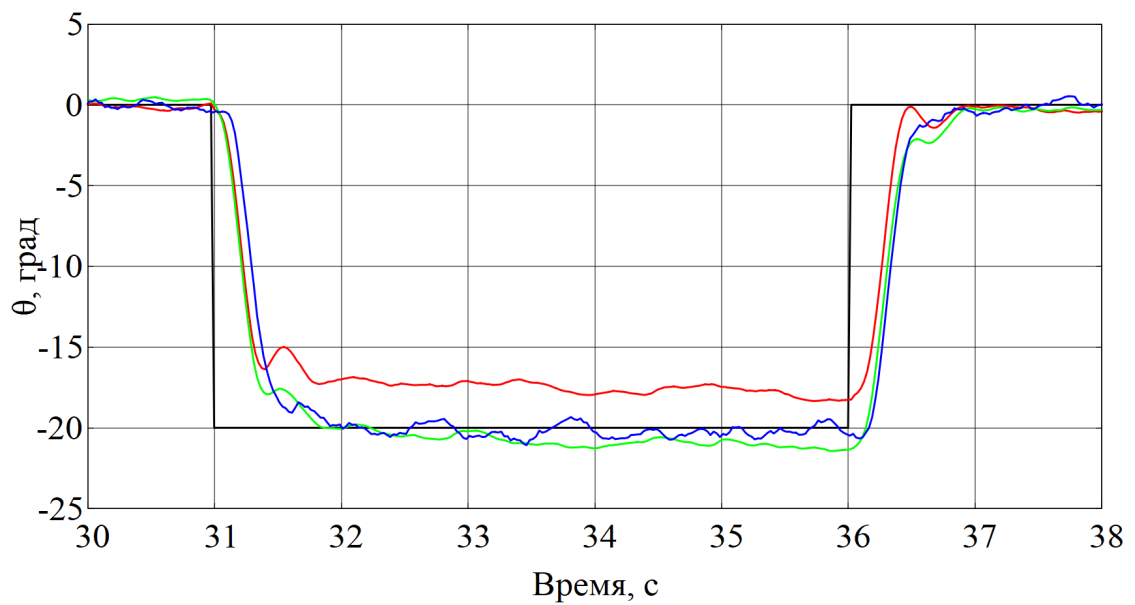


Рисунок 16 — Заданный угол тангажа (черным), угол модели (синим) и оценка угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным) и при $h = 0$ (зеленым)

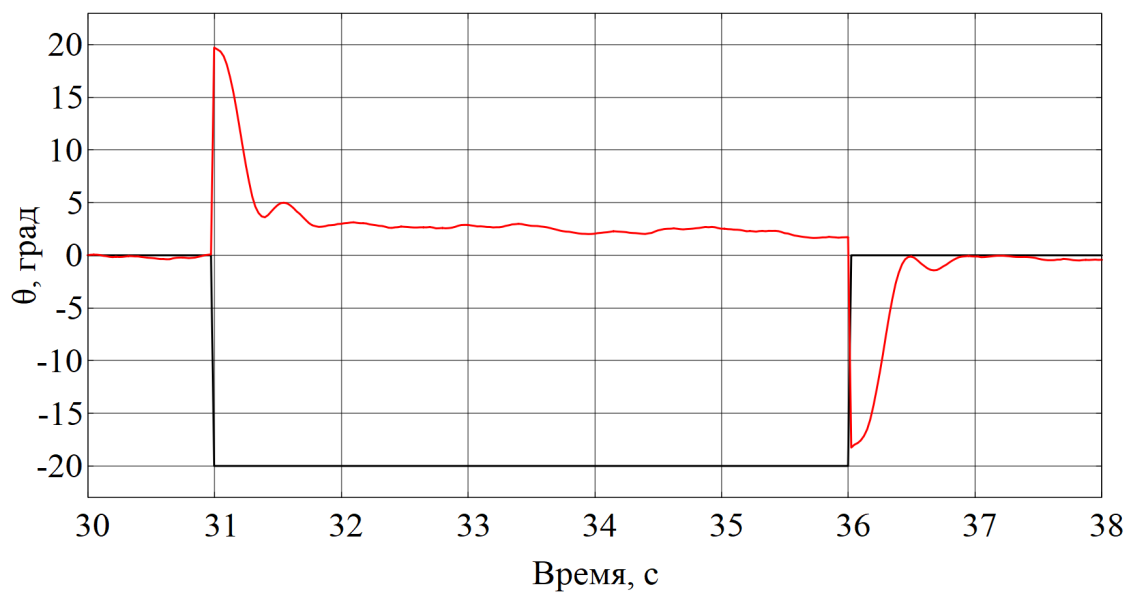


Рисунок 17 — Заданный угол тангажа (черным) и разность заданного угла и оценки угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м (красным)

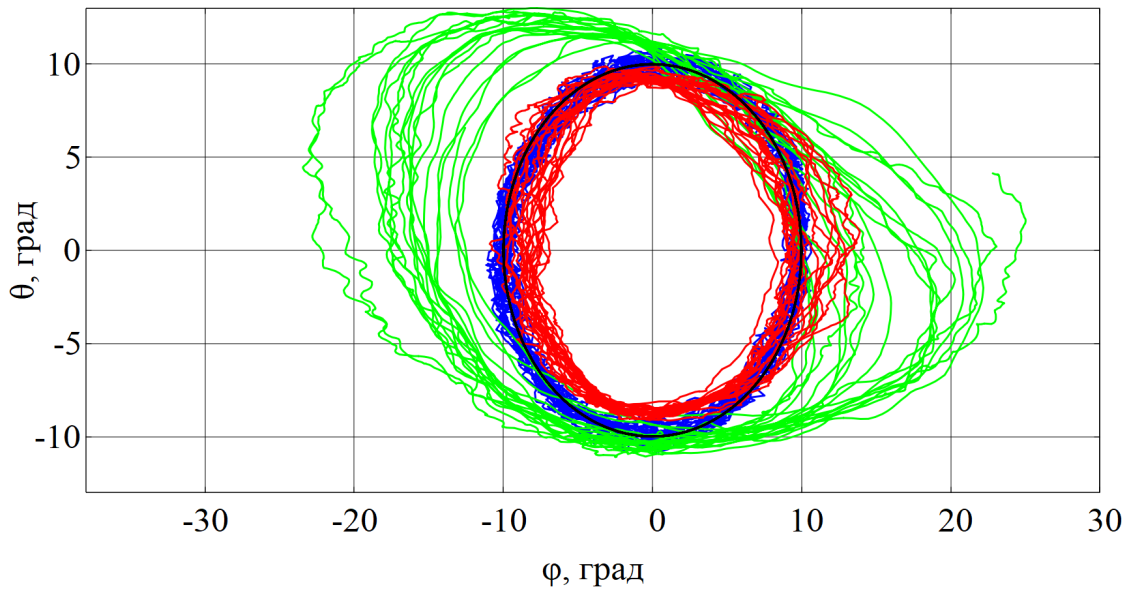


Рисунок 18 — Заданная угловая траектория движения (черным), траектория модели (синим) и оцененная в фильтре Калмана траектория аппарата при $h = 0,015$ м (красным) и при $h = 0$ (зеленым)

Таблица 1 — Средние и СКО угла крена в эксперименте по изменению угла на 20°

ϕ_{ref}	$\bar{\phi}_{sim}$	$\bar{\phi}_{h=0}$	$\bar{\phi}_{h=0,015}$	$\sigma_{\phi,h=0,015}$
0	0,0	-0,1	-0,1	0,4
20	19,9	39,0	21,6	0,4
-20	-20,0	-37,9	-23,1	0,3

Таблица 2 — Средние и СКО угла тангажа в эксперименте по изменению угла на 20°

θ_{ref}	$\bar{\theta}_{sim}$	$\bar{\theta}_{h=0}$	$\bar{\theta}_{h=0,015}$	$\sigma_{\theta,h=0,015}$
0	0,0	-0,3	-0,1	0,2
20	20,0	24,7	20,2	0,2
-20	-20,2	-18,9	-17,6	0,3

4 Заключение

Квадрокоптеры в последние десятилетия набирают все большую популярность в различных областях человеческой деятельности. Тестирование систем управления квадрокоптерами необходимо производить в безопасной экспериментальной среде с использованием тех или иных ограничивающих движение аппарата установок. Применение таких установок может привести к изменению механики движения аппарата, что необходимо учитывать в математической модели. Данная работа направлена на создание системы управления квадрокоптером, учитывающей расстояние между центром масс аппарата и осями вращения установки. В рамках исследования методом Лагранжа воссоздана математическая модель аппарата. Разработанная система управления протестирована при помощи программы, моделирующей аппарат с учетом шумов и временных задержек. Проведены летные эксперименты по удержанию углов наклона – их результат подтвердил то, что разработанная модель соответствует условиям проведения эксперимента.

5 Список литературы

- [1] Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 010500 «Механика»: [в 2 т.]. Т. 2. Динамика. – 2006. – С. 436
- [2] Бойчук Л. М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. – Рипол Классик, 1971.
- [3] Madgwick S. O. H. AHRS algorithms and calibration solutions to facilitate new applications using low-cost MEMS : дис. – University of Bristol, 2014.
- [4] Мальцев А. С., Ян А. П. Система управления движением квадрокоптера на основе каскадных фильтров Калмана //Автометрия. – 2022. – Т. 58. – №. 4.
- [5] Song J. et al. Fractional-order linear active disturbance rejection control design and optimization based improved sparrow search algorithm for quadrotor uav with system uncertainties and external disturbance //Drones. – 2022. – Т. 6. – №. 9. – С. 229.
- [6] Yu Y., Ding X. A quadrotor test bench for six degree of freedom flight //Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2012. – Т. 68. – С. 323-338.
- [7] Noordin A., Basri M. A. M., Mohamed Z. Sensor fusion for attitude estimation and PID control of quadrotor UAV //International Journal of Electrical and Electronic Engineering and Telecommunications. – 2018. – Т. 7. – №. 4. – С. 183-189.
- [8] Mechali O. et al. Observer-based fixed-time continuous nonsingular terminal sliding mode control of quadrotor aircraft under uncertainties and disturbances for robust trajectory tracking: Theory and experiment //Control Engineering Practice. – 2021. – Т. 111. – С. 104806.
- [9] Veyna U. et al. Quadcopters testing platform for educational environments //Sensors. – 2021. – Т. 21. – №. 12. – С. 4134.
- [10] Hancer M., Bitirgen R., Bayezit I. Designing 3-DOF hardware-in-the-loop test platform controlling multirotor vehicles //IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Т. 51. – №. 4. – С. 119-124.
- [11] El Houm Y. et al. Quadcopter attitude stabilization in a gyroscopic testbench //Innovation in Information Systems and Technologies to Support

Learning Research: Proceedings of EMENA-ISTL 2019 3. – Springer International Publishing, 2020. – С. 621-630.

[12] Nájera S. et al. Plataforma giroscópica realizada mediante impresión 3D para el control de actitud y orientación de UAVs multi-rotor //XL Jornadas de Automática. – Universidade da Coruña, Servizo de Publicacións, 2019. – С. 317-323.

[13] Bulhões J. S. et al. Platform and simulator with three degrees of freedom for testing quadcopters //Robotics and Autonomous Systems. – 2024. – Т. 176. – С. 104682.

[14] Томашевич С. И., Белявский А. О. Двухступенной комнатный стенд для исследования алгоритмов идентификации и управления движением квадрокоптера //XXIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. – 2016. – С. 317-320.

[15] Santos M. F. et al. Experimental validation of quadrotors angular stability in a gyroscopic test bench //2018 22nd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). – IEEE, 2018. – С. 783-788.

[16] Капитонов А. А. Введение в моделирование и управление для робототехнических систем. – 2016. – С. 59-81 или 73-81 или без страницы

[17] Belokon' S. A. et al. Control of flight parameters of a quadrotor vehicle moving over a given trajectory //Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2012. – Т. 48. – С. 454-461.

[18] Dimova A. S., Kotov K. Y., Maltsev A. S. Trajectory control of a quadrotor carrying a cable-suspended load //2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). – IEEE, 2020. – С. 501-505.

[19] Ebeid E. et al. A survey of open-source UAV flight controllers and flight simulators //Microprocessors and Microsystems. – 2018. – Т. 61. – С. 11-20.

[20] Ghommam J., Mnif F. Predictor-based control for an inverted pendulum subject to networked time delay //ISA transactions. – 2017. – Т. 67. – С. 306-316.

[21] Sharma M., Kar I. Control of a quadrotor with network induced time delay //ISA transactions. – 2021. – Т. 111. – С. 132-143.

[22] Sankaranarayanan V. N., Satpute S., Nikolakopoulos G. Adaptive robust

control for quadrotors with unknown time-varying delays and uncertainties in dynamics //Drones. – 2022. – T. 6. – №. 9. – C. 220.

[23] Panuntun R. et al. Networked control system in quadrotor altitude control with time delay compensation //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2020. – T. 1577. – №. 1. – C. 012031.

[24] Maaruf M., Mahmoud M. S., Ma'arif A. A survey of control methods for quadrotor uav //International Journal of Robotics and Control Systems. – 2022. – T. 2. – №. 4. – C. 652-665.

[25] Koken M. The experimental determination of the moment of inertia of a model airplane. – 2017.

[26] Labbe R. Kalman and bayesian filters in python //Chap. – 2014. – T. 7. – №. 246. – C. 4.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В данном приложении приведены результаты экспериментов по ступенчатому и пилообразному изменению угла наклона. На рисунке слева черным цветом обозначен заданный угол, синим – угол модели, красным – оценка угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0,015$ м, зеленым – оценка угла аппарата в фильтре Калмана при $h = 0$; на рисунке справа черным цветом обозначен заданный угол, красным – разность между углами аппарата при $h = 0,015$ м и заданным.

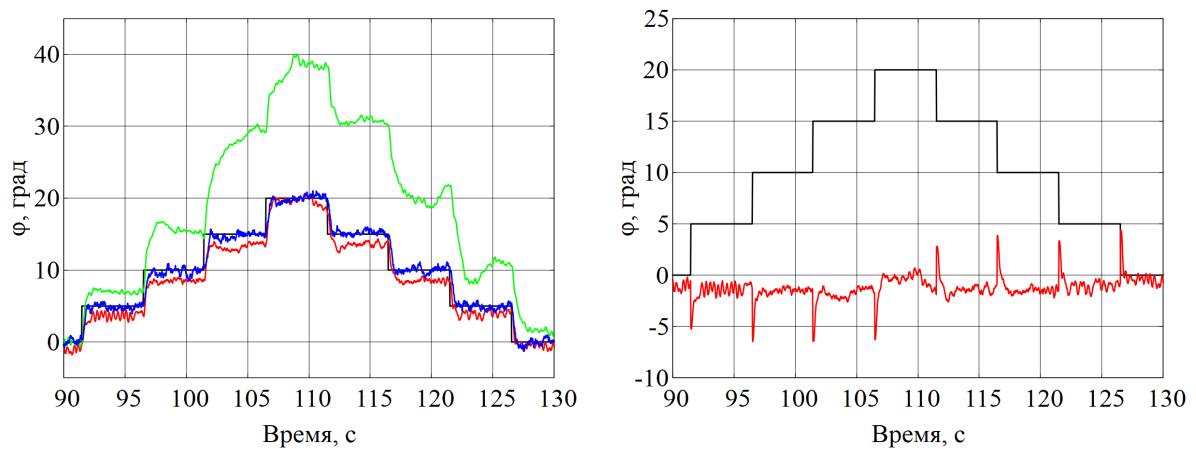


Рисунок А.1 — Крен, ступенчатое положительное изменение

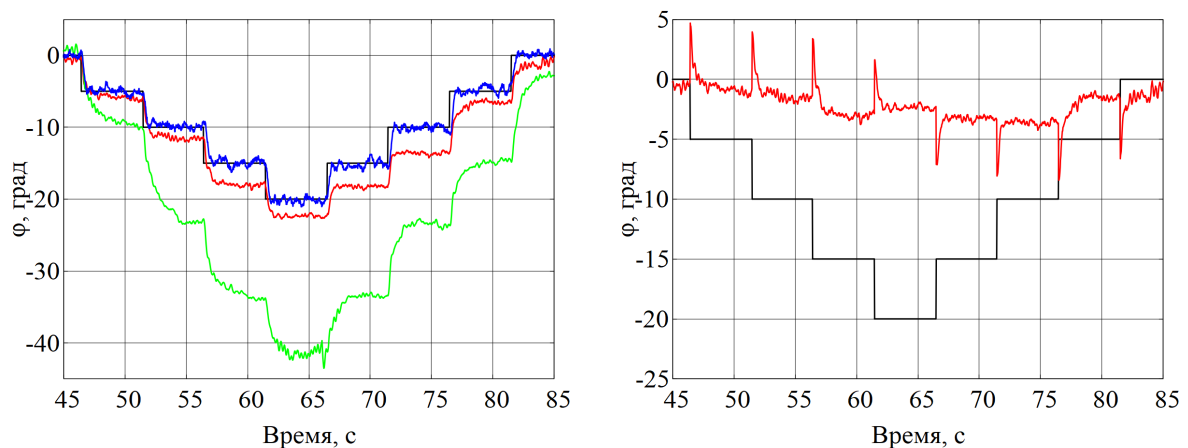


Рисунок А.2 — Крен, ступенчатое отрицательное изменение

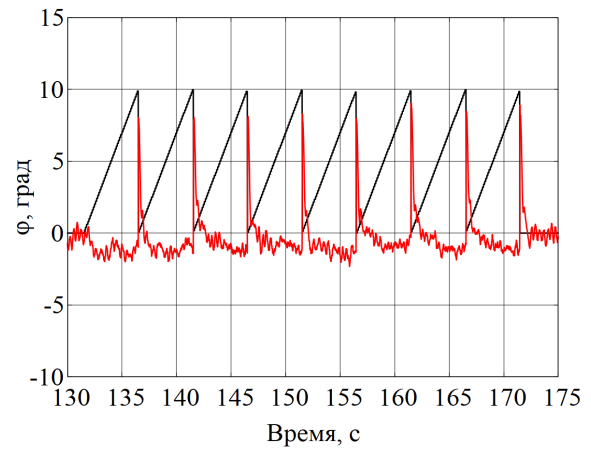
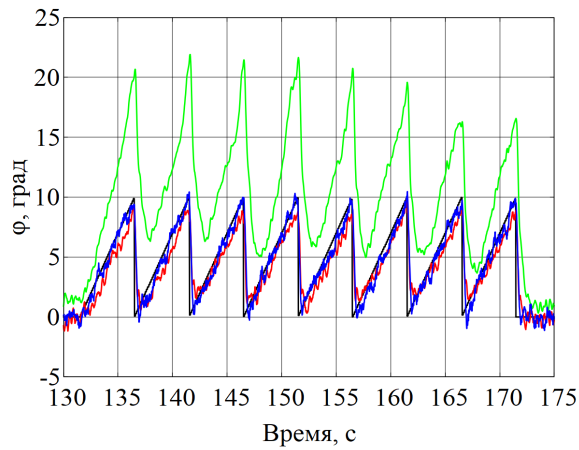


Рисунок А.3 — Крен, пилообразное положительное изменение, размах 10°

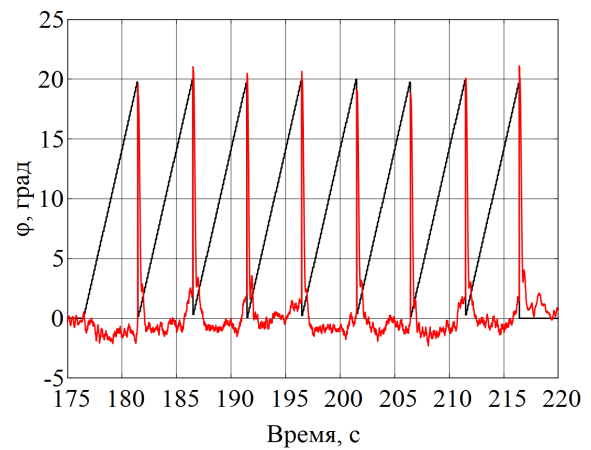
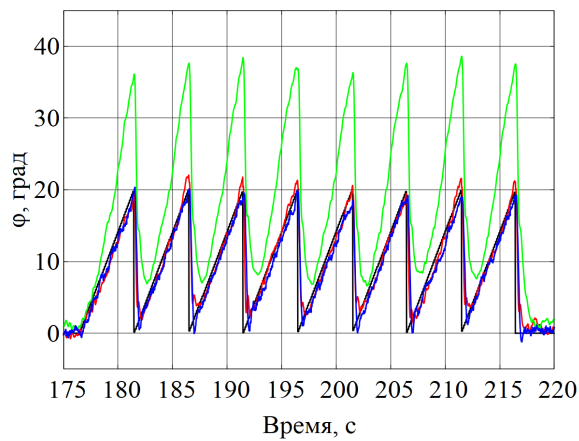


Рисунок А.4 — Крен, пилообразное положительное изменение, размах 20°

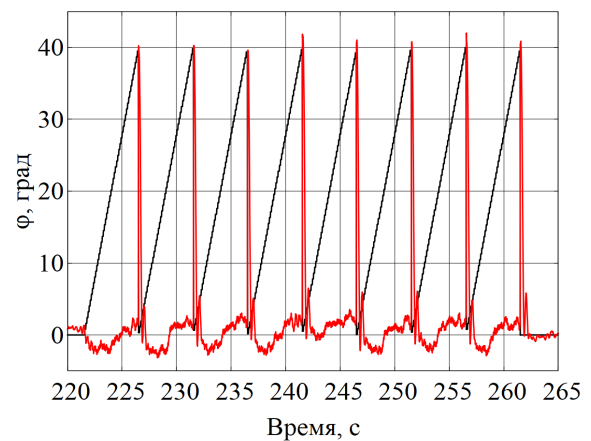
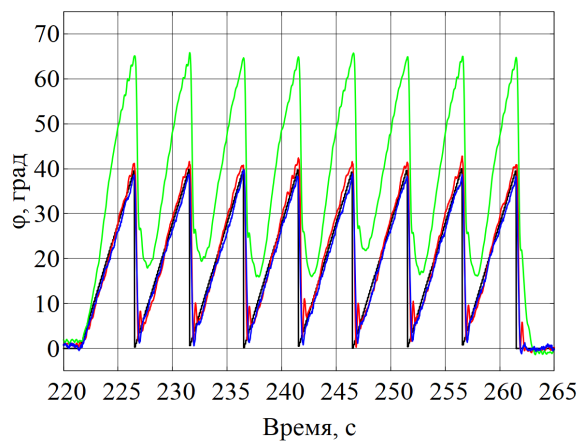


Рисунок А.5 — Крен, пилообразное положительное изменение, размах 40°

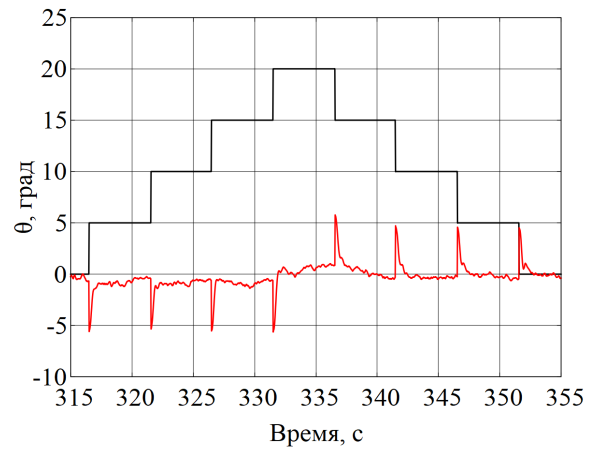
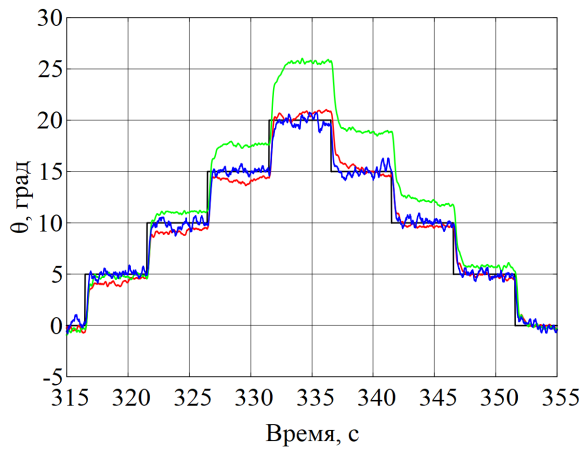


Рисунок А.6 — Тангаж, ступенчатое положительное изменение

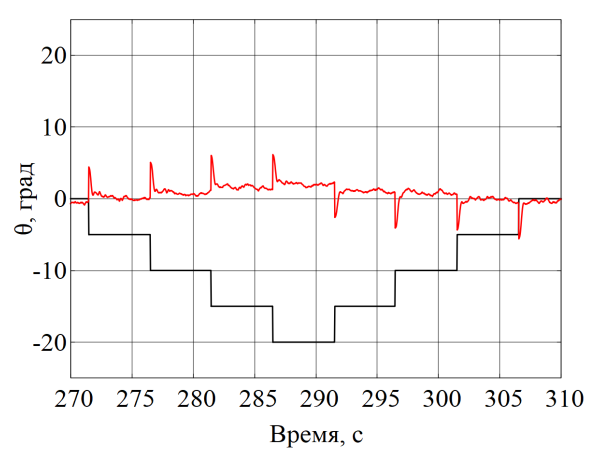
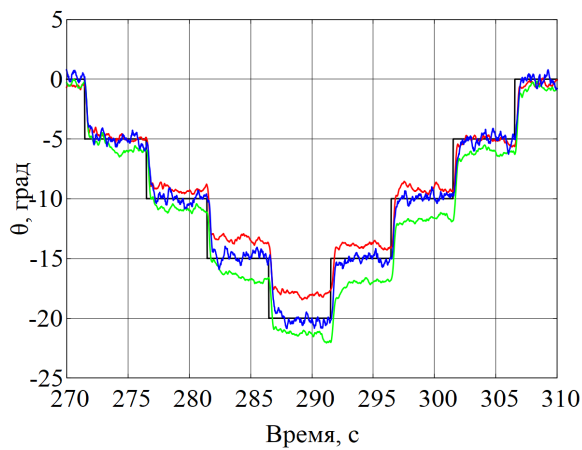


Рисунок А.7 — Тангаж, ступенчатое отрицательное изменение

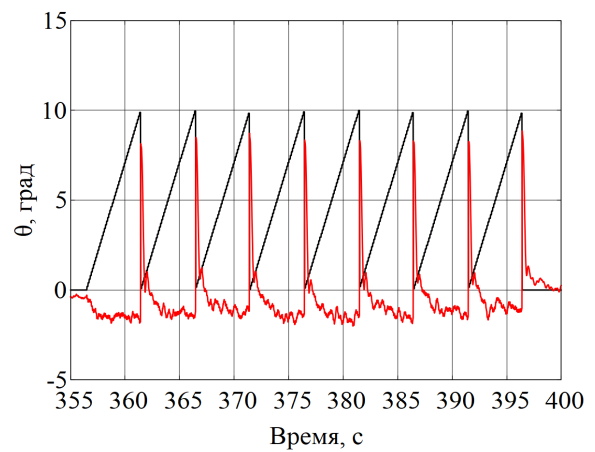
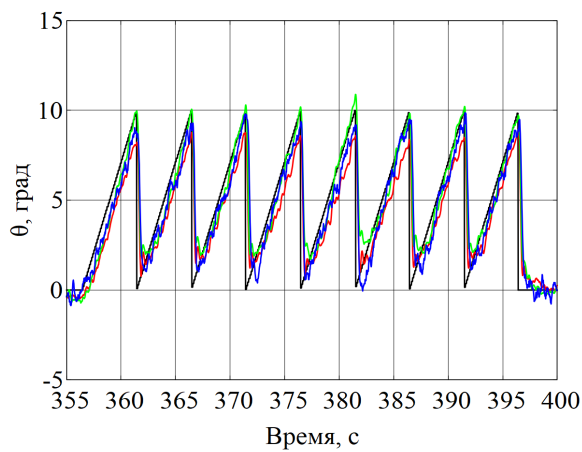


Рисунок А.8 — Тангаж, пилообразное положительное изменение, размах 10°

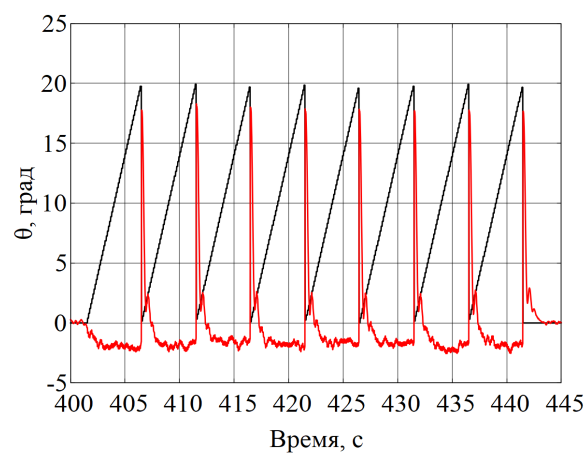
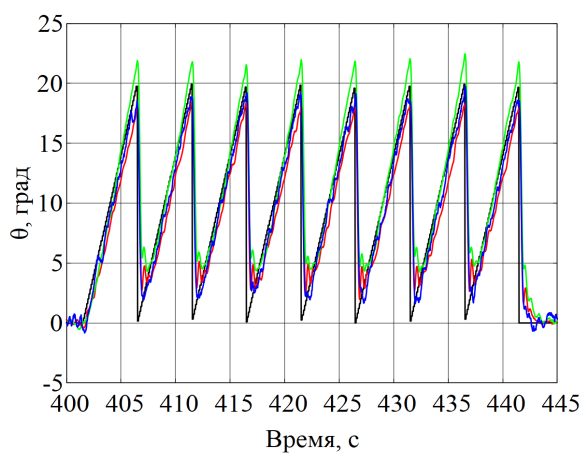


Рисунок А.9 — Тангаж, пилообразное положительное изменение, размах 20°

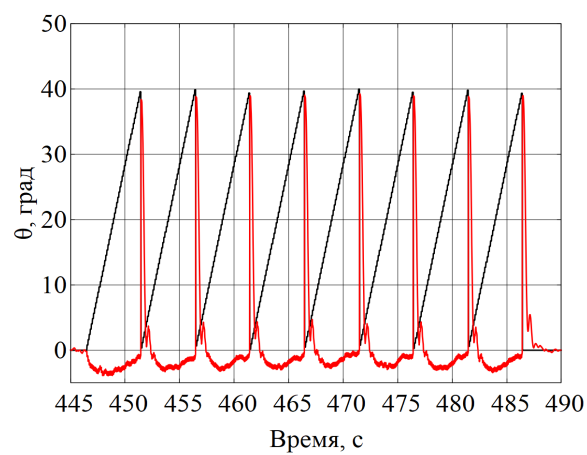
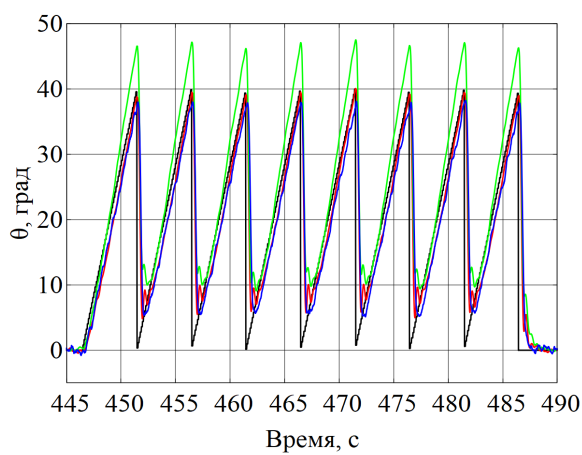


Рисунок А.10 — Тангаж, пилообразное положительное изменение, размах 40°